Formale Sprachen und Komplexität, SS 18,
Prof. Dr. Volker Heun

Übungsblatt 11

Abgabe: bis Mo 16.07.2018 8 Uhr

Institut für Informatik **Ludwig-Maximilians-Universität München**
Prof. Dr. Volker Heun

Formale Sprachen und Komplexität, SS 18
Übungsblatt 11

Abgabe: bis Mo 16.07.2018 8 Uhr

Nach Bearbeitung dieses Übungsblattes sollten Sie:

	Check
Den Begriff der NP-Vollständigkeit von Problemen verstanden haben.	
Die polynomialen Reduktion verstanden haben.	
Mit der polynomialen Reduktion die NP-Vollständigkeit eines Problems nachweisen können.	

Diese Ziele sind wichtige Hinweise für die Klausur!

Aufgabe 11-1 schriftlich bearbeiten (ohne Bonuspunkte)
Polynomielle Reduktion

Im Buch ist das $BIN\text{-}PACKING$ Problem folgendermaßen definiert: :

$$\begin{aligned} BIN\text{-}PACKING = \{(b, k, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+2} \mid a_1, \ldots, a_n \leq b \wedge \\ \exists f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, k\} : \forall j \sum_{f(i)=j} a_i \leq b\} \end{aligned}$$

Informell bedeutet $(b, k, a_1, \ldots, a_n) \in BIN\text{-}PACKING$ folgendes: Man kann die Gewichte $a_1, \ldots, a_n$ auf k Behälter verteilen, ohne dass einer schwerer als b wird.

Zeigen Sie, dass $BIN\text{-}PACKING$ NP-vollständig ist.

Hinweis: $PARTITION$ ist auf $BIN\text{-}PACKING$ reduzierbar. Wie viele Mengen sind in einer Partition? Wie viele Behälter sind dann wohl angebracht?

Aufgabe 11-2 schriftlich bearbeiten (ohne Bonuspunkte)
Komplexitätsklassen

Sei $L \in \mathit{TIME}(f(n))$ für eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dieser Funktion und dem Speicherplatzbedarf, also der Anzahl der Bandfelder die zum Lösen von L benötigt werden?

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 11-3 **Polynomielle Reduktion**

a) Seien $A \subseteq \Sigma_A^*$ und $B \subseteq \Sigma_B^*$ formale Sprachen. Beweisen Sie: $A \leq_p B$ gdw. $\overline{A} \leq_p \overline{B}$

b) **Zusatzaufgabe:** Die Komplexitätsklasse $\mathsf{co\text{-}NP}$ ist definiert durch $\mathsf{co\text{-}NP} = \{L \mid \overline{L} \in \mathsf{NP}\}$. Beweisen Sie:

Wenn es eine Sprache $K \in \mathsf{co\text{-}NP}$ gibt, die NP-vollständig ist, dann gilt $\mathsf{co\text{-}NP} = \mathsf{NP}$.

Hinweis: Neben dem Ergebnis der vorigen Teilaufgabe ist folgendes Lemma nützlich: Wenn $A \leq_p B$ und $B \in \mathsf{NP}$, dann $A \in \mathsf{NP}$.

Aufgabe 11-4 **NP-Vollständigkeit**

MinSumDiff	
Gegeben:	Endliche Mengen $A_1, \ldots, A_k \subseteq \mathbb{N}$ und eine Zahl $m \in \mathbb{N}$.
Gefragt:	$\exists\, I \subseteq \{1, \ldots, k\}$ mit $\sum_{i \in I} \min(A_i) - \sum_{i \notin I} \min(A_i) = m$?

Beweisen Sie, dass das so definierte *MinSumDiff*-Problem NP-vollständig ist.

Hinweis: eines der in der Vorlesung behandelten NP-harten Probleme kann ziemlich einfach polynomial auf *MinSumDiff* reduziert werden.