Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Volker Heun

Sommersemester 2023
Übungsblatt 3
3. Mai 2023

Algorithmische Bioinformatik: Bäume und Graphen

Abgabetermin: Samstag, den 20. Mai, 10^{00} in Moodle

Tutoraufgabe 1 (Vorbereitung bis zum 11.05.23)

Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Sigma}$ eine Menge von Restriktionen.

Zeige formal, dass für alle $A, B \in \mathcal{F}$ gilt, dass $\Pi(\Sigma, \mathcal{F}) = \Pi(\Sigma, \mathcal{F} \cup \{C\})$ mit

a) $C := A \cap B$;

b) $C := A \cup B$, sofern $A \cap B \neq \emptyset$;

c) $C := A \setminus B$, sofern $B \not\subseteq A$.

Definition *Eine 0-1-Matrix M besitzt die* circular ones property*, wenn es eine Permutation der Spalten gibt, so dass in jeder Zeile die Einsen oder die Nullen eine konsekutive Folge bilden.*

Die Matrix rechts erfüllt die *circular ones property* (bereits ohne Spaltenpermutation).

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei M eine 0-1-Matrix und M' eine 0-1-Matrix, die aus M wie folgt konstruiert wird: Für jede Zeile, in der in der k-ten Spalte eine 1 steht, werden alle Matrix-Elemente dieser Zeile komplementiert, d.h. aus 0 wird 1 und umgekehrt. Der Wert k ist dabei ein beliebiger Spaltenindex.

a) Zeige, dass unabhängig von der Wahl von k die Matrix M genau dann die *circular ones property* besitzt, wenn die Matrix M' die *consecutive ones property* besitzt.

b) Zeige, wie man in Zeit $O(m + n + \ell)$ entscheiden kann, dass eine 0-1-Matrix mit n Zeilen, m Spalten und ℓ Einsen die *circular ones property* besitzt.

Hinweis: Für Teil b) muss man sich zuerst eine platzsparende Darstellung der Matrix überlegen, da die übliche Realisierung als zweidimensionales Feld die geforderte Laufzeit nicht immer einhalten kann, da in der Regel $mn = \omega(m + n + \ell)$ gilt.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3

Sei Σ ein Alphabet und $\mathcal{F} \subseteq 2^\Sigma$ eine Menge von Restriktionen und sei

$$\mathcal{F}^* := \bigcap_{\substack{\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F} \\ \mathcal{F}' \text{ ist vollständig}}} \mathcal{F}'.$$

Zeige, dass $\mathcal{F}^*$ die kleinste (bzgl. Mengeninklusion) vollständige Menge ist, die $\mathcal{F}$ enthält, also dass $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^*$ gilt.