Ludwig-Maximilians-Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Volker Heun

Wintersemester 2016/17
Übungsblatt 3
10. November 2016

Algorithmische Bioinformatik II

Abgabetermin: Donnerstag, den 17. November, vor der Vorlesung

Betrachte für die ersten beiden Aufgaben das Problem MinPartition und das darauf folgende Approximationsschema PTAS_MinPartition.

MinPartition

Eingabe: Ein Folge $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.
Lösung: Ein Teilmenge $I \subseteq [1 : n]$.
Optimum: Minimiere $\mu(I, n) := \max\{\sum_{i \in I} x_i, \sum_{i \in [1:n] \setminus I} x_i\}$.

PTAS_MinPartition $((x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, \varepsilon \in (0, 1))$

```
Sortiere (x_1, ..., x_n), s.d. x_1 ≥ x_2 ≥ ··· ≥ x_n gilt;
k(ε) := min{n, ⌈(1 − ε)/ε⌉};
I := ∅;
// Finde optimale Lösung I für (x_1, ..., x_k(ε))
foreach (J ⊆ [1 : k(ε)]) do
    if (μ(J, k(ε)) < μ(I, k(ε))) then
        I := J;
// Erweitere I zu einer Lösung für (x_1, ..., x_n)
for (j := k(ε); j < n; j++) do
    if (Σ_{i∈I} x_i ≤ Σ_{i∈[1:j]\I} x_i) then
        I := I ∪ {j + 1};
return I;
```

Tutoraufgabe 1 (Vorbereitung bis zum 16.11.16)

Zeige, dass PTAS_MinPartition die Approximationsgüte $1 + \varepsilon$ besitzt.

Hinweis: Betrachte das zuletzt in die größere Menge aufgenommene Element x_ℓ. Zeige, dass die Partition optimal ist, falls $\ell \leq k(\varepsilon)$, bzw. dass die geforderte Approximationsgüte erfüllt wird, falls $\ell > k(\varepsilon)$.

Aufgabe 1

Schätze die Laufzeit von PTAS_MinPartition in Abhängigkeit von n und ε möglichst genau ab.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 2

Zeige, dass SAT $\leq_p$ CNF-SAT gilt.

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Boolesche Formel $F_1 \vee F_2$ genau dann erfüllbar ist, wenn die Boolesche Formel $(F_1 \vee x) \wedge (F_2 \vee \overline{x})$ erfüllbar ist, wobei F_1 und F_2 Boolesche Formeln sind und $x \notin V(F_1) \cup V(F_2)$ eine neue Variable ist. Verwende dann dieses Ergebnis.

Aufgabe 3

Zeige, dass E3SAT $\mathcal{NP}$-hart ist.

E3SAT

Eingabe: Eine Boolesche Formel F in 3-konjunktiver Normalform, wobei jede Klausel aus **genau 3 verschiedenen** Literalen besteht.

Ausgabe: Gibt es eine Belegung B von $V(F)$, so dass $\mathcal{I}_B(F) = 1$?